

瞬間中心と空間リンク機構の関係

重 松 洋 一*

(2007年11月30日受理)

1. はじめに

機構学のリンク機構の運動を解析するための基本概念の一つに瞬間中心¹⁾がある。リンク機構を構成する各リンクの運動は必ず基準となるリンクや座標系に対する相対的な運動であり、瞬間中心の直感的な定義は「リンク機構を構成する任意の2つのリンク1とリンク2において、どちらか一方のリンクに乗って見たとき、もう一方のリンクが各瞬間で必ずある点まわりに回転しており、そのときの回転中心のこと」である。

例えば図1のように $t=0$ でのリンク A が $t=\Delta t$ でリンク B まで移動したとし、このときリンク上の任意の線分 P_1P_2 が $P_1'P_2'$ まで移動したとする。また相対運動の基準は地面リンクとする。もしリンクが点 C まわりに回転しているとする、点 C は線分 P_1P_1' の垂直二等分線 l_1 上にあり、線分 P_2P_2' の垂直二等分線 l_2 上にもあるから、点 C はこれらの直線 l_1, l_2 の交点でしかあり得ない。しかしこの直感的な定義には以下の問題点がある。

- (1) 図1ではリンク上の代表点として2点 P_1, P_2 しか考えていないが、別の2点 P_3, P_4 で考えても同じ点 C まわりに回転していると言えるかはわからない。
- (2) 時間 Δt を 0 に近づけたとき、点 C は連続的に移動することはわかるが、点 C の極限点の存在や位置はわからない。
- (3) 瞬間中心は空間リンク機構でも存在するのかが不明である。また、瞬間中心は平面リンク機構に必ず存在する理由が不明確である。

ここでは微分形式を用いて空間リンク機構の運動を解析し、空間運動と平面運動の違いを明確にし、瞬間中心の適用範囲を明確にする。

2. 瞬間中心の形式的な定義

図2(a)のように、リンク1(土台)にリンク2が回転対偶12で連結されている場合、リンク2は点12まわりに回転する。このとき点12ではリンク1, 2の点の速度は0である。図2(b)のようにリンク2がリンク1上をころがる場合には、固定した回転中心は存在しないが、接触点 c で、やはりリンク1, 2の点の速度は0である。

図2(c)の場合、リンク3は直接リンク1に接触していないが、リンク1に乗っている人からリンク3を見ると、各瞬間、リンク3がある点 c まわりに回転していることは直感的にはわからないが、機構学の本では点 c の

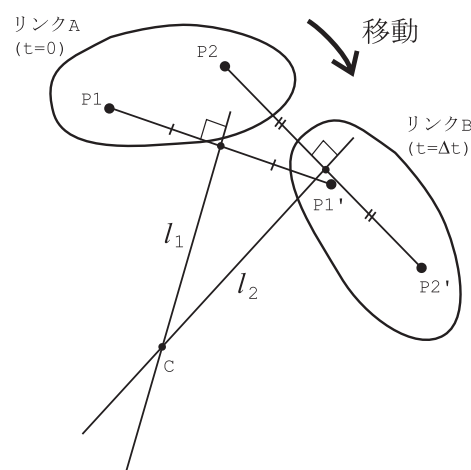


Fig.1 Finite planar movement of a link

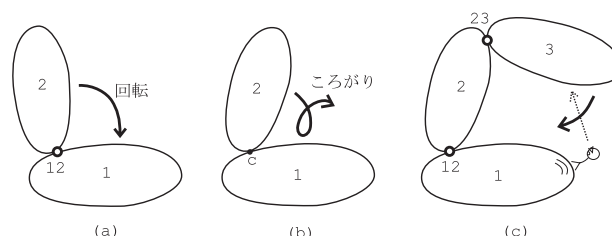


Fig.2 Examples of instantaneous center of velocity of two links

存在を証明なしに主張している。このときも点 c ではリンク1, 3上の点は同じ速度を持つ。リンク1, 3はともに加速度運動していてもよい。

以上から、次のように瞬間中心を形式的に定義できる。(瞬間中心の形式的な定義)

「リンク1とリンク2の瞬間中心12とは、リンク1上の点と見なしてもリンク2上の点と見なしても同じ速度になる点である。」

特にリンク1が静止している場合、瞬間中心12は静止した回転中心になる。また、リンク1が一般的に加速度運動していてもリンク1に乗って見た場合、瞬間中心12はリンク2の回転中心になっている。また、この定義ではリンク1もリンク2も同等であるので、瞬間中心12は瞬間中心21と同じである。

*機械工学科

3. 動座標系を用いた空間リンクの運動の表現²⁾

空間リンク機構を構成する任意の2つのリンクを取り出し、一方のリンクに乗って見たときのもう一方のリンクの空間中の相対運動を調べてみる。図3に示すように、一方のリンクBの任意の代表点をOとし、そのリンクに埋め込まれた座標系を $R_b = (e_1^b, e_2^b, e_3^b)$ とし、 (O, e_1^b, e_2^b, e_3^b) によりリンクの位置姿勢を表現する。同様に、もう一方のリンク1の任意の代表点を P_0 とし、そのリンクに埋め込まれた座標系を $R_0 = (e_1^0, e_2^0, e_3^0)$ とし、 $(P_0, e_1^0, e_2^0, e_3^0)$ によりリンク1の位置姿勢を表現する。

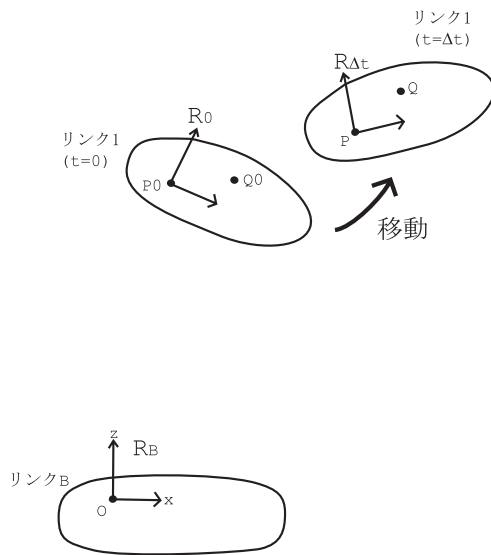


Fig.3 Infinitesimal spatial movement of a link with respect to a base link

ここで (e_1^b, e_2^b, e_3^b) , (e_1^0, e_2^0, e_3^0) は各々, xyz 方向の単位ベクトルであり、基底ベクトルである。リンクBに乗って $t = \Delta t$ 間のリンク1の運動を考える。

リンクBに乗って見ているので、リンクBは常時静止して見える。リンク1上の任意の点 Q の運動は代表点を P_0 から P まで移動させたあと、 $\overrightarrow{P_0 Q_0}$ を \overrightarrow{PQ} まで回転させると考える。

任意の点 Q の速度ベクトルを求めるために、まず、 Δt の間の変位ベクトル $\overrightarrow{Q_0 Q}$ を求める。

$$\begin{aligned}\overrightarrow{Q_0 Q} &= \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OQ_0} \\ &= (\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ}) - (\overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0 Q_0}) \\ &= \overrightarrow{P_0 P} + (\overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{P_0 Q_0})\end{aligned}\quad (1)$$

両辺を Δt で割るとリンク上の点 Q の平均速度ベクトルが以下のように求まる。

$$\frac{\overrightarrow{Q_0 Q}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{P_0 P}}{\Delta t} + \frac{\overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{P_0 Q_0}}{\Delta t}\quad (2)$$

ここで $\Delta t \rightarrow 0$ の極限をとると、右辺第1項めはリンク上の代表点 P の速度ベクトル \mathbf{v}_P になる。

一方、右辺第2項めの極限を計算するために、基準座標系 R_b からリンク座標系 R への直交変換を、 $t = 0$ と $t = \Delta t$ において各々、次式とする。

$$R_{\Delta t} = R_0 + dR_0 = (A + dA) R_b \quad (t = \Delta t \text{ で}) \quad (3)$$

$$R_0 = A R_b \quad (t = 0 \text{ で}) \quad (4)$$

ここで $A + dA$, A は各々、 3×3 の直交行列であり、基準座標系 R_b での基底ベクトル (e_1^b, e_2^b, e_3^b) を回転させて、各々、 $R_{\Delta t}$, R_0 の座標系の基底ベクトルに変換する。また、微小量 dR_0 , dA 等は微分形式とみなす。両辺を各々、引くと次式を得る。

$$dR_0 = dA R_b = dA A^{-1} R_0 = dA A^T R_0 = \Omega R_0 \quad (5)$$

ここで $\Omega \equiv dA A^T$ とした。

直交行列の定義から任意の t で $A A^T = I$ が成立するから、両辺の時間微分を取ると次式が成立する。

$$\dot{A} A^T + A \dot{A}^T = 0 \quad (6)$$

両辺に微小時間 Δt をかけて

$$dA A^T + A dA^T = 0, \quad \therefore \Omega + \Omega^T = 0 \quad (7)$$

従って Ω は歪対称であるから外積 $\Omega \times$ と等価になる。

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{Bmatrix} \times \quad (8)$$

式(2)の第2項めの分子は次式のように変形できる。

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{P_0 Q_0} &= \sum_i a_i \mathbf{e}_i - \sum_i a_i \mathbf{e}_i^0 = R_{\Delta t} \mathbf{a} - R_0 \mathbf{a} \\ &= (dR_0) \mathbf{a} = (\Omega R_0) \mathbf{a} = \Omega \times \overrightarrow{P_0 Q_0}\end{aligned}\quad (9)$$

従って、式(2)の第2項めの極限は次式のようにになる。

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{P_0 Q_0}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Omega}{\Delta t} \times \overrightarrow{P_0 Q_0} = \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{P_0 Q_0} \quad (10)$$

ここで、 $t = 0$ での $\overrightarrow{P_0 Q_0}$ をあらためて \overrightarrow{PQ} と書くと、結局、空間運動するリンク上の任意の点 Q の速度ベクトル \mathbf{v}_Q は以下のようにになる。

$$\mathbf{v}_Q = \mathbf{v}_P + \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{PQ} \quad (11)$$

これは機構学における速度の図形解法等の基本式であるが、上記の証明より、この式は平面リンク機構に限らず空間リンク機構で一般に成立していることがわかる。

(例-1)

空間リンク機構を構成するリンクが隣接する一つ前のリンクの z 軸方向に回転または直動する構成は通常のマニピュレータ等で多用されている。ここではリンク2が

リンク1の z 軸まわりに回転するときの Ω を計算してみる．リンク1が z 軸まわりの回転角 ϑ でリンク2に移動したとすると，直交行列 R_z は

$$R_z = \begin{pmatrix} C_\alpha & -S_\alpha & 0 \\ S_\alpha & C_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (12)$$

である．ここで $\cos \alpha = C_\alpha$, $\sin \alpha = S_\alpha$, $\tan \alpha = T_\alpha$ 等と略記し，以下，同様に三角関数を略記する．逆行列 R_z^{-1} と外微分 dR_z は各々，

$$R_z^{-1} = \begin{pmatrix} C_\alpha & S_\alpha & 0 \\ -S_\alpha & C_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad dR_z = \begin{pmatrix} -S_\alpha d\alpha & -C_\alpha d\alpha & 0 \\ C_\alpha d\alpha & -S_\alpha d\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

となるから， Ω は次式になる．

$$\Omega = dR_z \cdot R_z^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} d\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d\alpha \end{pmatrix} \times \quad (14)$$

従って Ω は大きさが $d\alpha = \omega dt$ で z 軸まわりのベクトルの外積と等価であることがわかる．

4. ねじ軸の存在と瞬間中心の存在

仮にねじ軸 l が存在するとすると，図4のように，ねじ軸 l 上の任意の点 A の速度 \mathbf{v}_A はすべて $k\omega$ であり，ねじ軸 l 上にない点 Q の速度 \mathbf{v}_Q はねじ軸 l まわりに角速度 ω で回転することによる回転速度 $\omega \times \overrightarrow{AQ}$ と $k\omega$ の和であるはずである．

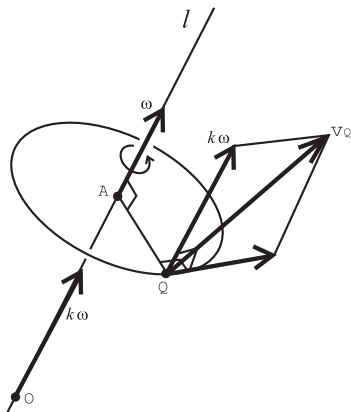


Fig.4 Screw axis of a spatial link

ねじ軸上の点 A が未知の場合でも，図より，ねじ軸上の一点 A は必ずの $\omega \times \mathbf{v}_Q$ 方向になければならないから，

$$\overrightarrow{QA} = \lambda(\omega \times \mathbf{v}_Q) \quad (15)$$

としてみる．リンク上の任意の2点の速度の関係式より，

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_A &= \mathbf{v}_Q + \omega \times \overrightarrow{QA} \\ &= \mathbf{v}_Q + \omega \times \lambda(\omega \times \mathbf{v}_Q) \\ &= \mathbf{v}_Q + \lambda \{ (\omega \cdot \mathbf{v}_Q) \omega - |\omega|^2 \mathbf{v}_Q \} \\ &= (1 - \lambda |\omega|^2) \mathbf{v}_Q + \lambda (\omega \cdot \mathbf{v}_Q) \omega \end{aligned} \quad (16)$$

従って， $\lambda = 1/|\omega|^2$ とすると，

$$\mathbf{v}_A = \frac{(\omega \cdot \mathbf{v}_Q)}{|\omega|^2} \omega \quad (\equiv k\omega) \quad (17)$$

となり，ねじ軸 l 上の一点 A が見つかったことになる．

特に，平面リンク機構の場合，全てのリンクは一平面 Π 内を運動するので，任意の2個のリンク1，2を取り出して，一方のリンク1に乗って見た時のもう一方のリンク2の運動のねじ軸 $l_{1,2}$ 方向の並進速度 $v_{l,2}$ は零であり，ねじ軸 $l_{1,2}$ は平面 Π に常に垂直である．従って，並進速度 $v_{l,2} = 0$ のねじ軸は回転軸となり，リンク1，2の瞬間中心1,2とは回転軸 $l_{1,2}$ と平面 Π との交点のこととなる．

また，リンク上の任意の点のねじ軸 l 方向の並進速度は $k\omega$ であるから，この並進速度で移動する座標系 $R_{k\omega}$ に乗って見ると，リンクはねじ軸 l まわりに回転しているだけになる．従って，リンク上の点 Q の速度を図形解法で求めるためには，図5に示すように，ねじ軸に垂直な平面 Π 上で連節法等による図形解法を適用して，平面 Π 上での点 Q の分速度ベクトル $\mathbf{v}_{Q\perp}$ を求め，得られた分速度ベクトル $\mathbf{v}_{Q\perp}$ に並進速度 $k\omega$ を加えればよい．

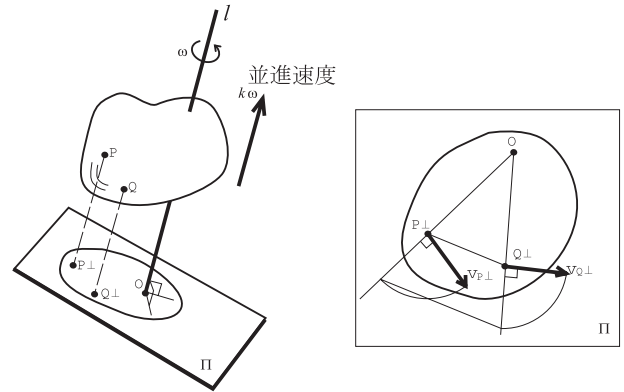


Fig.5 Velocity relation between two points on a spatial link

(例-2)

図6のようなフック継手 (Hook's joint)¹⁾を構成する各リンクの運動をねじ軸の考えを用いて解析してみる．

図で十字リンク2の回転軸が $(A_0A'_0, C_0C'_0)$ にあるときの各リンクの基準の位置姿勢とする．入力軸1と出力軸3は一定の曲げ角度 α で土台リンクBに軸受で保持されているとする．入力軸1を回転角 ϑ だけ回転させたときに出力軸3が φ だけ回転したとする．

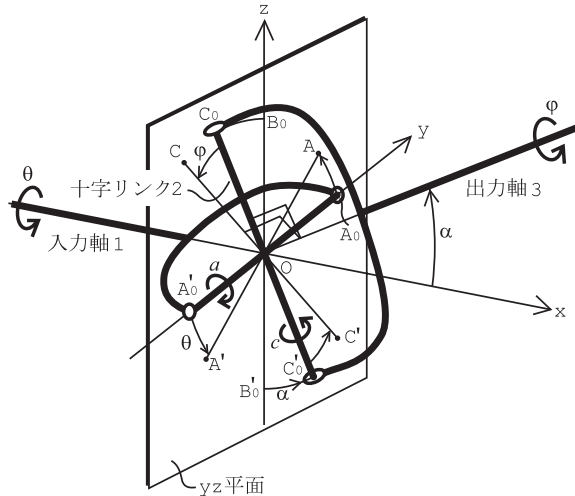


Fig.6 Configuration of the Hook's joint

入力軸 1 を ϑ だけ回転させると、十字リンク 2 の軸 A_0A' は入力軸に垂直な yz 平面内を ϑ だけ回転して軸 AA' になる。また、そのとき出力軸が φ だけ回転したとすると、十字リンク 2 の軸 C_0C' は出力軸に垂直な平面内を φ だけ回転して軸 CC' になる。軸方向 (AA', CC') の単位ベクトル $\mathbf{u}_A, \mathbf{u}_C$ は各々、次式になる。

$$\mathbf{u}_A = \begin{Bmatrix} 0 \\ C_\vartheta \\ S_\vartheta \end{Bmatrix}, \mathbf{u}_C = E^{\mathbf{k}, \varphi} \cdot \begin{Bmatrix} C_\alpha \\ 0 \\ S_\alpha \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -S_\alpha C_\varphi \\ -S_\varphi \\ C_\alpha C_\varphi \end{Bmatrix} \quad (18)$$

ここで $E^{\mathbf{k}, \varphi}$ は出力軸 $\mathbf{k} = (-S_\alpha, 0, C_\alpha)$ まわりにベクトルを φ だけ回転させる回転行列³⁾である。

十字リンク 2 の軸 (AA', CC') は常に直交しているから、次式の (ϑ, φ) の関係式を得る。

$$\mathbf{u}_A \cdot \mathbf{u}_C = 0, \therefore C_\vartheta S_\varphi = S_\vartheta C_\alpha C_\varphi, \quad T_\varphi = C_\alpha T_\vartheta \quad (19)$$

点 O はいずれのリンク上の点と見なしでも常に不動だから、土台リンクに乗って見れば、各リンクは点 O をとおる回転軸まわりに回転している。土台リンクに乗って見ると出力軸 3 の回転方向は常に \mathbf{k} である。

土台リンクに対する出力軸の角速度ベクトルは次式のように隣接リンク間の角速度ベクトルの和で表現できる。

$$\boldsymbol{\omega}_{B,3} = \boldsymbol{\omega}_{B,1} + \boldsymbol{\omega}_{1,2} + \boldsymbol{\omega}_{2,3} \quad (20)$$

各ベクトルを成分表示すると次式になる。

$$\dot{\varphi} \begin{Bmatrix} C_\alpha \\ 0 \\ S_\alpha \end{Bmatrix} = \dot{\vartheta} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \dot{a} \begin{Bmatrix} 0 \\ C_\vartheta \\ S_\vartheta \end{Bmatrix} + \dot{c} \begin{Bmatrix} -S_\alpha C_\varphi \\ -S_\varphi \\ C_\alpha C_\varphi \end{Bmatrix} \quad (21)$$

ここで a, c は各々、 AA', CC' 軸まわりの隣接リンク間の回転角である。フック継手では入力軸の角速度が一定でも出力軸の角速度は変動するが、変動の原因は上式の右辺第 3 項めの x 成分が φ に依存するからと見れる。

出力軸の回転角 φ は入力軸の回転角 ϑ と曲げ角度 α で一意に決まるから、 $(\alpha, \vartheta, \varphi)$ を定数と見なし、また $\dot{\vartheta}$ も任意に与えるパラメータと見なすと、上式は未知数 $(\dot{\varphi}, \dot{a}, \dot{c})$ の連立方程式である。Cramer の公式を用いて上式を解くと次式を得る。

$$(\dot{\varphi}, \dot{a}, \dot{c}) = \left(C_\alpha, S_\alpha C_\alpha S_\vartheta, \frac{S_\alpha C_\vartheta^2}{C_\varphi} \right) \frac{\dot{\vartheta}}{C_\vartheta^2 + C_\alpha^2 S_\vartheta^2} \quad (22)$$

従って入力軸の回転角 ϑ に対する各軸の角速度は図 7 のようになる。

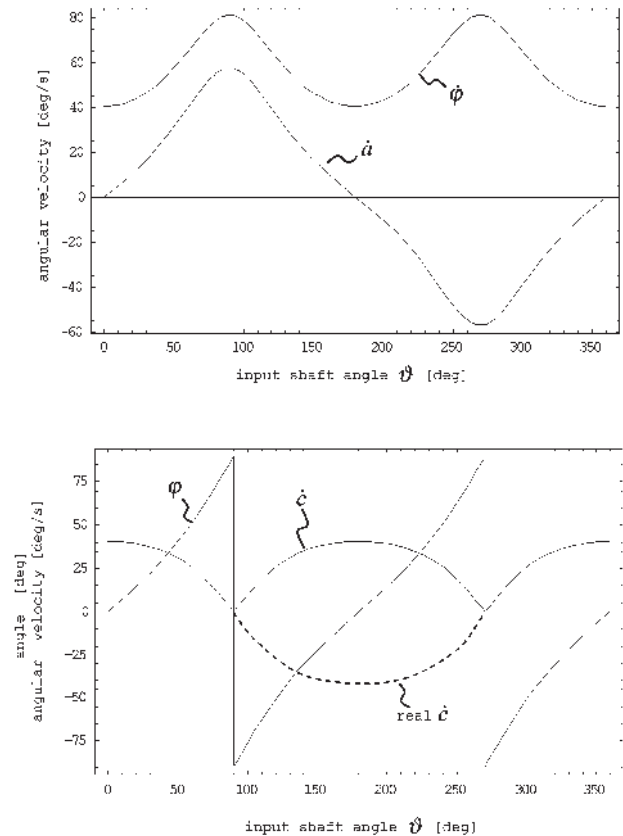


Fig.7 Angular velocities of two axes of the crosspiece and the output shaft of the Hook's joint

図で φ を ArcTan で計算したので $(-\pi/2, \pi/2)$ 間の主値しか計算できていないが、 φ は連続であるから、 ϑ が $(\pi/2, 3\pi/2)$ のときに φ に π を加え、 ϑ が $(3\pi/2, 2\pi)$ のときに φ に 2π を加える必要がある、従って、真の \dot{c} は ϑ が $(\pi/2, 3\pi/2)$ のときにマイナスになる。

また、図のいずれの変数も周期 $\vartheta = 2\pi$ の関数である。回転角 (a, c) は各々、 $\vartheta = 0$ と $\vartheta = 2\pi$ で一致するはずだから、角速度 (\dot{a}, \dot{c}) の面積は一周で零になっているはずであるが、これは角速度 (\dot{a}, \dot{c}) が各々、 $(\dot{a} = 0, \dot{c} = 0)$ となる ϑ を原点としたときに奇関数になっていることから示せる。

5. 瞬間中心が移動する場合のリンク上の点の加速度

ここで空間リンク機構の任意のリンク上の任意の2点 P, Q 間の速度ベクトルの関係式を時間微分して加速度の関係式を導出してみる.

空間リンク上の任意の2点 P, Q 間の速度ベクトルの関係式より

$$\mathbf{v}_Q = \mathbf{v}_P + \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{PQ} \quad (23)$$

両辺の時間微分をとると

$$\mathbf{a}_Q = \dot{\mathbf{v}}_Q = \dot{\mathbf{v}}_P + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \overrightarrow{PQ} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\overrightarrow{PQ}} \quad (24)$$

右辺第3項を変形すると

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} \times \dot{\overrightarrow{PQ}} &= \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{v}_Q - \mathbf{v}_P) = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{PQ}) \\ &= (\boldsymbol{\omega} \cdot \overrightarrow{PQ}) \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}) \overrightarrow{PQ} \end{aligned} \quad (25)$$

従って, 空間リンク機構の任意のリンク上の任意の2点 P, Q 間の加速度ベクトルの関係式は次式になる.

$$\mathbf{a}_Q = \mathbf{a}_P + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \overrightarrow{PQ} + (\boldsymbol{\omega} \cdot \overrightarrow{PQ}) \boldsymbol{\omega} - |\boldsymbol{\omega}|^2 \overrightarrow{PQ} \quad (26)$$

特に平面リンク機構の場合, $\overrightarrow{PQ} \perp \boldsymbol{\omega}$ より, 右辺第3

項めの $\boldsymbol{\omega}$ の項が零になるので次式を得る.

$$\mathbf{a}_Q = \mathbf{a}_P + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \overrightarrow{PQ} - |\boldsymbol{\omega}|^2 \overrightarrow{PQ} \quad (27)$$

6. おわりに

ここでは, 空間リンク機構の各リンクに埋め込まれた動座標系の運動を, 微分形式を用いて解析した. 空間リンク機構の任意のリンク1とリンク2について, 一方のリンク1に乗って見たとき, もう一方のリンク2上の任意の2点 P, Q の速度と加速度の関係式を導出し, 速度の関係式より, 必ずねじ軸 I_{12} が存在していることを示した. 平面リンク機構では, ねじ軸方向の並進速度が零であり, ねじ軸がリンクの運動する平面に垂直であることを示した. また, ねじ軸の応用例として, フック継手の十字リンクと入出力軸ヨーク間の角速度を計算した.

参考文献

- 1) 稲田重男, 森田鈞, 機構学, オーム社, (平成6)
- 2) 栗田稔, 微分形式とその応用, 現代数学社, (2002), 69
- 3) 広瀬茂男, ロボット工学, 裳華房, (1995), 12

A Relation between Instantaneous Center of Velocity and Spatial Link Mechanism

Yoichi SHIGEMATSU

A spatial link mechanism is investigated theoretically using moving frame attached to each link. Relative infinitesimal movement of a link with respect to other link is represented by the differential form. Velocity and acceleration relations between arbitrary two points on a link are derived using the form. By the velocity relation, a link is proved to move around a screw axis relative to another link along which axis the link rotates and translates simultaneously. A planar link mechanism is regarded as a special case where the translational velocity along the screw axis vanishes. The Hook's joint is analysed as an example using the screw axes to derive the relative angular velocities of the two axes on the crosspiece.